Nowy sposób całkowania
pewnych równań różniczkowych
pierwszego rzędu o dwu zmiennych.

Przez

K. Olearskiego.

Rzecz przedstawiona na posiedzeniu Wydz. mat.-przyr. z d. 7 listopada 1892 r.; ref. czł. Zajączkowski.

1. Równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu o dwu zmien nych przywieść można do kształtu

$$dy + P . dx = 0 \qquad \ldots\ldots \qquad \text{(I)}$$

gdzie P oznacza funkcyę x i y.

Posiadamy sposoby, służące do wynajdywania czynnika całkującego równań różniczkowych, wtedy mianowicie, gdy ten czynnik jest funkcyą jednej tylko zmiennej, albo iloczynem takich funkcyj, albo jest funkcyą jednorodną zmiennych x i y; są też wreszcie sposoby Liouville'a, Malmstena, Liego, odnoszące się do innych szczególnych przypadków [1]).

Z tych metod, dających czynniki całkujące, mają przedewszystkiem doniosłość tę, które pozwalają z góry przewidzieć, czy ich można

[1]) Metody te znajdzie czytelnik wyłożone częścią w dziele Dr. Wł. Zajączkowskiego: Wykład nauki o równaniach różniczkowych, częścią w H. Laurent'a: Traité d'analyse t. V. Paris. 1890.

użyć w przypadku danym. Mniej natomiast korzyści przynoszą metody, polegające na próbowaniu, czy pewne warunki dadzą się spełnić lub nie, jak n. p. metoda Liego lub Liouville'a; albowiem nieraz, chociaż przez stósowne przerobienie lub dobranie funkcyj można uczynić zadosyć wymaganym warunkom, to przecież znalezienie odpowiednich przerobień lub funkcyj jest bardzo trudnem. Zadaniem niniejszego krótkiego artykułu jest zwrócenie uwagi na okoliczności, iż równania przywiedzione do kształtu (I), gdy P spełnia warunek:

$$\text{(II)} \quad \Delta \operatorname{arctg} P = \left(\frac{\partial^2}{dx^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \operatorname{arctg} P = 0$$

czyli

$$\text{(III)} \quad \Delta P = \frac{2P}{P^2+1} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 \right],$$

dają się całkować przez funkcye zmiennych zespolonych $x + iy$ i $x - iy$, tak, iż czynnik całkujący można znaleźć bez próbowania.

2. Funkcya $f(x + iy)$ daje według związku:

$$\text{(1)} \quad f(x + iy) = f_1(x, y) + i f_2(x, y)$$

dwie funkcye f_1 i f_2 zadość czyniące równaniom:

$$\text{(2)} \quad \Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$$

$$\text{(3)} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$\text{(4)} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = - \frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Z dwu ostatnich związków wynika, gdy m oznacza stałą:

$$\text{(5)} \quad \frac{\partial (f_1 + m f_2)}{\partial x} = \frac{\partial (f_2 - m f_1)}{\partial y}$$

Czynnik całkujący μ równania różniczkowego (I) spełnia równanie:

$$\text{(6)} \quad \frac{\partial (\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0.$$

Gdy więc znajdziemy takie funkcye f_1 i f_2, aby było:

$$\text{(7)} \quad f_1 + m f_2 = \mu, \quad f_2 - m f_1 = \mu P,$$

a zatem:

$$\text{(8)} \quad P = \frac{f_2 - m f_1}{m f_2 + f_1},$$

to funkcye te doprowadzą nas, na mocy równań (7) do znajomości czynnika całkującego μ, a dalej do całki równania (I). Zaznaczyć jednak muszę, iż w związku (8) stałą dowolną m, bez naruszenia ogólności wyników, przyjąć można równą zeru, jeżeli tylko pozwolimy na dostateczną ogólność funkcyi f.

W istocie jest:

$$(1 - mi) f = f_1 + m f_2 + i (f_2 - m f_1),$$

a więc jeżeli: $(1 - mi) f \mp f'$,

to będzie:

$$f_1 + m f_2 = f'_1, \quad f_2 - m f_1 = f'_2.$$

Jeżeli więc pozwolimy, aby funkcya f była w razie potrzeby urojoną, wtedy możemy równania (7) i (8) pisać w prostszej postaci:

$$\mu P = f_2, \quad \mu = f_1, \quad P = \frac{f_2}{f_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Z ostatniego równania wynika:

$$f = f_1 (1 + Pi),$$

a przeto:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= lgf = lgf_1 + \frac{1}{2} lg(1 + P^2) + arctg\, P \,.\, i \,. \\ \varphi_1 &= lgf_1 + \frac{1}{2} lg(1 + P^2), \quad \varphi_2 = arctg\, P. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Gdy P spełnia warunek:

$$\Delta\, arctg\, P = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

wtedy (jak z teoryi funkcyi zmiennej zespolonej wynika), zakładając:

$$\varphi_2 = arctg\, P,$$

znaleźć można zawsze taką funkcyę φ_1, że $\varphi_1 + i\varphi_2$ jest pewną funkcyą φ zmiennej zespolonej $x + iy$.

Do tego służy którekolwiek z dwu równań:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a, 4a)$$

z uwzględnieniem jednak drugiego, o ile tego potrzeba do wyznaczenia dowolnej funkcyi jednej zmiennej całkowaniem wprowadzonej. Pierwsze n. p. daje:

$$\varphi_1 = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1 + P^2} \,.\, dx + \alpha(y) \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

gdzie funkcyę $\alpha(y)$ należy wyznaczyć z uwagi na drugie równanie (4a), skąd dalej, ze względu na związki (10) i (9), mamy:

$$lgf_1 = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P^2} . dx - \frac{1}{2} lg(1+P^2) + \alpha(y)$$

(12) . $$\mu = \frac{e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P^2} . dx + \alpha(y)}}{(1+P^2)^{1/2}}$$

Wyrażenie więc:

$$\frac{e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P^2} . dx + \alpha(y)}}{(1+P^2)^{1/2}} (dy + Pdx) = f_1 . dy + f_2 . dx$$

jest zupełną różniczką; pomnożone przez i tworzy urojoną część wyrażenia:

(A) . . $$f(z) . dz = f_1 . dx - f_2\, dy + i(f_1 . dy + f_2 . dx),$$

w którem $z = x + iy$, czyli urojoną część wyrażenia

(13) . . . $$\frac{e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P^2} . dx + \alpha(y)}}{(1+P^2)^{1/2}} (1 + Pi) . dz = f(z) . dz$$

Jeżeli więc założymy:

(14) . $$S = f(z) . dz = F(z) = \int e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P} . dx + \alpha(y)} . \left(\frac{1+Pi}{1-Pi}\right)^{1/2} . dz,$$

to całka równania pierwszego (jeżeli funkcyja F jest rzetelna [1])), może być podana w kształcie:

$$\frac{F(x+iy)-F(x-iy)}{2i}=C; \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

zawsze zaś jest ona częścią urojoną wyrażenia (14) zrównaną stałej dowolnej, jeżeli tylko

$$\Delta \, arctg \, P = 0 ,$$

co jest koniecznym warunkiem istnienia odpowiedniej funkcyi φ_1.

3. Zupełną różniczką jest także część rzetelna wyrażenia (13), t. j.

$$f_1 \,.\, dx - f_2 \,.\, dy = \frac{\int\limits_e \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P^2}\, dx + \alpha(y)}{(1+P^2)^{1/2}} (dx - P \,.\, dy).$$

Ten sam czynnik całkujący $\mu = \dfrac{\int\limits_e \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P^2} \,.\, dx + \alpha(y)}{(1+P^2)^{1/2}}$ równania:

$$dy + P \,.\, dx = 0$$

jest zarazem czynnikiem całkującym równania:

$$dx - P \,.\, dy = 0 ,$$

które przywiedzione do kształtu (1) przedstawiają się w postaci:

$$dy + P' \,.\, dx = dy - \frac{1}{P} \,.\, dz = 0 , \; \frac{-1}{P} = P' \quad . \quad . \quad (16)$$

Gdy P spełnia warunek:

$$\Delta \, arctg \, P = 0 ,$$

---

[1]) Przez funkcyę rzetelną rozumiem taką, która dla rzetelnego argumentu ma wielkość rzetelną. Natomiast n. p. funkcya $\psi = f(\varphi(x) + i\,\psi(x))$, gdy f, φ i ψ przedstawiają funkcye rzetelne, nie jest rzetelną. Funkcya lg właściwie nie jest rzetelną, gdyż dla ujemnego argumentu ma wielkość złożoną z części rzetelnej i urojonej. Jednak jej część urojona jest stałą. Do takich zaś funkcyi $F(x)$, których część urojona jest stałą, można zastosować powyższe rozwiązanie zadania, gdyż dla takich funkcyi część urojona $F(z)$ zrównana stałej da to samo co $\frac{1}{2i}[F(x+iy) - F(x-iy)] =$ stałej.

przeto P' czyni zadość równaniu

$$(17) \quad \ldots \quad \left.\begin{aligned} \Delta\, arctg\, \frac{1}{P'} = 0, \text{ albo :} \\ \Delta\, arctg\, P' = 0 \end{aligned}\right\}$$

Czynnikiem całkującym równania (16) jest $-P \, . \, \mu$, gdyż to równanie pomnożone przez $-P$ daje:

$$dx - P \, . \, dy = 0 \,,$$

równanie posiadające, jak się okazało, czynnik całkujący μ.

Równanie więc (16), gdy P' spełnia warunek (17) posiada czynnik całkujący:

$$(18) \quad \ldots \quad -P \, . \, \mu = -P \, . \, \frac{e^{\displaystyle\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P^2} dx + \alpha(y)}}{(1+P^2)^{1/2}} = -\frac{C^{\displaystyle\int \frac{\frac{\partial P'}{\partial y}}{1+P'^2} dx + \alpha(y)}}{(1+P'^2)^{1/2}}$$

Całką równania (16) jest część rzetelna funkcyi:

$$(19) \left\{\begin{aligned} F(z) &= \int e^{\displaystyle\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P^2} \, . \, dx + \alpha(y)} \left(\frac{1+Pi}{1-Pi}\right)^{\frac{1}{2}} dz = \\ &= \int e^{\displaystyle\int \frac{\frac{\partial P'}{\partial y}}{1+P'^2} \, . \, dx + \alpha(y)} \left(\frac{P'-i}{P'+i}\right)^{\frac{1}{2}} . \, dz = -i \int e^{\displaystyle\int \frac{\frac{\partial P'}{\partial y}}{1+P'^2} . dx + \alpha(y)} \left(\frac{1+P'i}{1-P'i}\right)^{\frac{1}{2}} . dz \end{aligned}\right.$$

zrównana ilości stałej, lub w razie, gdy F jest funkcyą rzetelną:

$$(20) \qquad \frac{1}{2} \left\{ F(x+iy) + F(x-iy) \right\} = C.$$

4. Funkcyę $f(z)$, której całka $F(z)$ w części rzetelnej lub urojonej daje całkę równania różniczkowego, według tego, czy $-\frac{1}{P}$, czy też P jest równe $\frac{f_2}{f_1}$ można wprost otrzymać, zakładając w wyrażeniu otrzymanem na μ: $y = 0$.

Gdyż w istocie z równania (1) i (9) wynika:

$$f(x+iy) = \mu(x, y) + iP\mu(x, y)$$

z czego widać, iż za podstawieniem $y=0$, $f(x)=\mu(x, 0)\{(1+iP(x^0))\}$ Aby funkcya była rzeczywistą, musi P zadość czynić warunkowi: $P(x, 0)=0$, albo $P(x, 0)=\infty$. W tym razie na mocy równania (14) jest zarazem F funkcyą rzetelną. Z równania (15) dalej wnieść można, iż całka równania $dy+P\,.\,dx=0$, gdy P spełnia warunek (II), a nadto $P[x, y=0]=0$, posiada tę własność, iż znika za podstawieniem $y=0$.

5. Następujące przykłady [1]) objaśnią podane powyżej wzory:

Przykład 1-szy. Równanie $dy+\frac{y}{x}\,.\,dx=0$ spełnia warunek (II),

$$\mu=\frac{e^{\int\frac{1}{x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}\,.\,dx}}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=x$$

Stąd: $f(z)=z$, $F(z)=\frac{z^2}{2}$.

Całka danego równania przedstawia się zatem w kształcie:

$$\frac{(x+iy)^2-(x-iy)^2}{4i}=xy=C.$$

Przykład 2-gi.

$$dy+tg\,(xy)\,.\,dx=0$$

$$\mu=\frac{e^{\frac{x^2-y^2}{2}}}{[1+tg^2(xy)]^{1/2}}=C^{\frac{x^2-y^2}{2}}\cos(xy)$$

Stąd za podstawieniem $y=0$:

$$f(x)=\mu(x, 0)=e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$F(z)=\int f(z)\,dz=\int e^{\frac{z^2}{2}}\,.\,dz \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

---

[1]) Dobieram umyślnie przykłady jak najprostsze, dające się łatwo w inny sposób sprawdzić.

Całką równania $dy + \operatorname{tg}(x \,.\, y) \,.\, dx = 0$ jest więc

$$\frac{F(x+iy) - F(x-iy)}{2i} = C,$$

gdzie F jest określone związkiem (21), t. j.

$$\int \frac{x^2-y^2}{c^2} (\cos(x \,.\, y) \,.\, dy + \sin(x \,.\, y)\, dx) = C. \tag{22}$$

W przykładzie tym $\alpha(y)$ okazało się ze względu na związek (4a) równe $-\frac{y^2}{2}$.

6. Powyższe dwa przykłady odnosiły się do przypadku, w którym funkcye f i F są rzetelne, wtedy częsć $F(z)$ jest $\frac{f}{2\,i}[F(x+iy) - F(x-iy)]$. Koniecznym tego warunkiem jest aby dla $y = 0$, było $P = 0$.

Gdy P nie znika dla $y = 0$ wtedy, jak już wyjaśniłem, funkcya f zawiera część urojoną i jest dana przez równanie:

$$f(x) = \mu(x, 0) \left\{1 + i\,P(x, 0)\right\}$$

co okazuje się na dwu następujących przykładach:

Przykład 3-ci. $$dy = \frac{2y+1}{2x}\, dx = 0.$$

$$P = \frac{2y+1}{2x}, \quad \varphi_1 = \tfrac{1}{2} \lg \left[x^2 + \frac{(2y+1)^2}{4}\right]$$

$$\mu = \frac{\left[x^2 + \frac{(2y+1)^2}{4}\right]^{1/2}}{\left[1 + \left(\frac{(2y+1)}{2x}\right)^2\right]^{1/2}} = x.$$

$$f(x) = x + \frac{i}{2}$$

$$F(x) = \tfrac{1}{2} x^2 + \frac{i}{2} x$$

Całka danego równania jest częścią urojoną $F(x+iy)$ zrównaną stałej, t. j. $2xy + x = C$.

Przykład 4-ty: $dy - \frac{2x}{2y+1} dx = 0$. $P = \frac{-2x}{2y+1}$ spełnia równanie (III), czynnikiem całkującym jest: $\frac{2y+1}{2}$, całką część rzeczywista funk-

cyi $\frac{1}{2}(x+iy)^2+\frac{i}{2}(x+iy)$ zrównania stałej, t. j.

$$x^2-y^2-y=C.$$

Nie potrzeba prawie dodawać, iż aby funkcya f, a dalej funkcya F była rzetelną, warunek $P(x, 0)=0$ jest nie tylko konieczny ale wystarczający, jeżeli tylko $P(x, y)$ jest, jak przypuszczam, funkcyą rzetelną. Wtedy czynnik całkujący $\mu(x, y)$ jest także funkcyą rzetelną i jak ze związku: $f(x)=\mu(x, 0)\{1+iP(x, 0)\}$
wynika f a więc także F (na mocy równania (14)) są funkcyami rzetelnemi.

Podobnie łatwo okazać iż jeżeli całka równania

$$dy+P\,dx=0 \tag{I}$$

może być podana w kształcie części rzetelnej lub urojonej funkcyi $F(z)$ zrównanej ilości stałej, t. j. w kształcie:

część rzeczywista $F(z)=C$,

lub: część urojona $F(z)=C$,

gdzie z oznacza zmienną zespoloną $z=x+iy$, wtedy P musi spełniać równanie (II). W istocie na mocy związku (14), dającego określenie f i związku (A) wnosić można, iż równanie (I) pomnożone odpowiednim czynnikiem całkującym przybiera postać:

$$f_1\,dx-f_2\,dy=0 \tag{B}$$

lub:

$$f_1\,dy+f_2\,dx=0 \tag{C}$$

według tego, czy część rzeczywista lub urojona funkcyi $F(z)$ przyrównana stałej ma być jego całką. W razie gdy równanie (I) może być przedstawione w postaci (B) f_1 i f_2 są funkcyami sprzężonemi, t. j. f_1+if_2 będzie funkcyą zmiennej zespolonej $z=x+iy$, że zaś:

$$P=-\frac{f_1}{f_2},$$

przeto, jeżeli P' jest określone przez związek

$$P'=-\frac{1}{P}=\frac{f_2}{f_1}, \tag{D}$$

to $f_1(1+iP')$ jest funkcyą zmiennej $x+iy$ oznaczoną przez f, a f_1 jest funkcyą rzetelną zmiennych x i y.

Funkcyą zmiennej $x+iy$ jest więc $\lg f = \lg f_1 + \operatorname{arctg} P'$; stąd zaś wynika że P' a dalej P czyni zadość równaniu (II).

Podobnie gdy dane równanie rózniczkowe (I) daje się przywieść do postaci (C), wtedy:

$$P = \frac{f_2}{f_1},$$

skąd w sposób zupełnie podobny do powyższego okazać można, że P zadość czyni równaniu (II).

8. Podany powyżej sposób jest, jak sądzę, jedynym sposobem całkowania przez funkcye zmiennej zespolonej, w którym z góry może być podane i kryteryum stosowalności i czynnik całkujący może być podany. Weźmy funkcyę:

$$F[x + (\alpha + \beta i)\, y] = F_1(x, y) + i\, F_2(x, y)$$

i przypuśćmy że $F_1(x, y) = C$ jest całką danego równania różniczkowego $dy + P dx = 0$.

Łatwo okazać że F_1 i F_2 czynią zadość równaniom:

$$(\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = 2\alpha \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = 2\alpha \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y}.$$

Podobnym równaniom czyni zadość czynnik całkujący μ, określony związkiem:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

tudzież iloczyn μP, jest bowiem:

$$(\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = 2\alpha \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y}$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2 (\mu P)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\mu P)}{\partial y^2} = 2\alpha \frac{\partial^2 (\mu P)}{\partial x \partial y}$$

Z tych równań należałoby wyrugować μ aby otrzymać kryteryum stosowalności w kształcie równania różniczkowego cząstkowego odnoszącego się do P, a nadto niema sposobu znalezienia czynnika całkującego: kiedy przeciwnie, w razie gdy zmienną zespoloną jest $x+iy$, rzecz ta, jak powyżej okazałem, jest bardzo łatwą. Pozostaje więc w tym razie droga przerobienia równania zapomocą podstawienia $\xi = x + \alpha y$ i sprowa-

dzenia tegoż do równania dającego się według sposobu podanego całkować.

Równanie n. p.:

$$dy + \frac{(x+y)[1+2(x+y)^2+y^2]}{x+2y+2x[(x+y)^2+y^2]}dx = 0$$

może być, zapomocą podstawienia $x+y=\xi$, łatwo doprowadzone do kształtu spełniającego warunek II i okazuje się różniczką części rzeczywistej funkcyi $\lg(x+y+iy)+(x+y+iy^2)$ zrównanej ilości stałej.

Wogóle jeżeli F_n jest funkcyą zmiennej zespolonej $x+(\alpha_n+i\beta_n)y$:

$$F_n[x+(\alpha_n+i\beta_n)y] = F_{n,1}(x,y)+iF_{n,2}(x,y),$$

oraz m_n stałą dowolną, to za pomocą łatwego rachunku można okazać, że:

$$dy.\sum_n\{(\alpha_n+\beta_n m_n)F_{n,1}+(\alpha_n m_n-\beta_n)F_{n,2}\}+dx.\sum_n(F_{n,1}+m_nF_{n,2})=0$$

jest zupełną różniczką, tak iż kiedy można znaleźć funkcye F_n takie, aby dla danego równania różniczkowego, P spełniało warunek:

$$P=\frac{\sum_n\{F_{n,1}+m_nF_{n,2}\}}{\sum_n\{(\alpha_n+m_n\beta_n)F_{n,1}+(\alpha_n m_n-\beta_n)F_{n,2}\}}$$

natenczas czynnik całkujący jest znaleziony.

Polega to jednak na próbowaniu. Jedynie w razie poprzednio omówionym, gdy mamy do czynienia z funkcyą zmiennej $x+iy$, powyżej podane uwagi dają nam sposób znajdowania czynnika całkującego. Czy niema sposobu ogólniejszego, opartego na funkcyach dwu zmiennych $x+iy$, $y+ix$ nie zdołałem dotąd dociec.

Sprostowanie pomyłek drukarskich

w rozprawie:

„Nowy sposób całkowania pewnych równań różniczkowych"

przez K. Olearskiego.

Str. 3 wiersz 3 zamiast: $(1-mi)\, f + f'$

powinno być: $(1-mi)\, f = f'$

Str. 4 wiersz ostatni zamiast: $S = F(z) = \int e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P} . dx + \alpha(y)} \left(\frac{1+Pi}{1-Pi}\right)^{1/2} dz$

powinno być: $S = F(z) = \int e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P^2} . dx + \alpha(y)} \left(\frac{1+Pi}{1-Pi}\right)^{1/2} .dz$

Str. 5 wiersz 11 zamiast: $dy + P.dx - 0$ powinno być: $dy + P.dx = 0$

Str. 5 „ 15 zamiast: $dy - \frac{1}{P} dz = 0$ powinno być: $dy - \frac{1}{P} dx = 0$

Str. 6 wiersz 10 zamiast: $-P\mu . \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P^2} . dx + \alpha c y) = -P . \frac{e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P^2} . dx + \alpha(y)}}{(1+P^2)^{1/2}} = -\frac{C}{(1+P'^2)^{1/2}}$

powinno być: $-P\mu = -P . \frac{e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{(1+P^2)^{1/2}} + \alpha(y)}}{(1+P^2)^{1/2}}$

Str. 6 wiersz 12 i 13 zamiast: $F(z) = \int e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P^2} . dx + \alpha(y)} \left(\frac{1+Pi}{1-Pi}\right)^{1/2} dz$

$$= \int e^{\int \frac{\frac{\partial P'}{\partial y}}{1+P'^2} dx + \alpha(y)} \left(\frac{P'-i}{P'+i}\right)^{1/2} dz = -i \int e^{\int \frac{\frac{\partial P'}{\partial y}}{1+P'^2} . dx + \alpha(y)} \left(\frac{1+P'i}{1-Pi}\right)^{1/2} dz$$

powinno być:

$$F(z) = \int \frac{e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P^2} . dx + \alpha(y)}}{\left(\frac{1+Pi}{1-Pi}\right)^{1/2}} dz = \int \frac{e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{1+P'^2} . dx + \alpha(y)}}{\left(\frac{P'-i}{P'+i}\right)^{1/2}} . dz$$

$$= -i \int \frac{e^{\int \frac{\frac{\partial P'}{\partial y}}{1+P'^2} . dx + \alpha(y)}}{\left(\frac{1+P'i}{1-P'i}\right)^{1/2}} . dz$$

Str. 7 wiersz 1 zamiast: $f(x) = \mu(x, 0) \{ 1 + P(x^0 \}$

powinno być: $f(x) = \mu(x, 0) \{ 1 + iP(x, 0) \}$

Str. 7 wiersz 16 zamiast: $\mu = \frac{e^{\frac{x^2-y^2}{2}}}{[1 + tg^2(xy)]^{1/2}} = C^{\frac{x^2-y^2}{2}} \cos(xy)$

powinno być: $\mu = \frac{e^{\frac{x^2-y^2}{2}}}{[1 + tg^2(xy)^{1/2}]} = e^{\frac{x^2-y^2}{2}} \cos(xy)$

Str. 8 wiersz 4 zamiast: $\int c^{\frac{x^2-y^2}{2}} (\cos(x) y\, dy + \sin(xy)\, dx) = C$

powinno być: $\int e^{\frac{x^2-y^2}{2}} [\cos(xy)\, dy + \sin(xy)\, dx] = C$

Str. 8 wiersz 8 zamiast: część $F(z)$ jest $\frac{f}{2i} [F(x+iy) - F(x-iy)]$

powinno być: część urojona $F(z)$ jest $\frac{1}{2i} [F(x+iy) - F(x-iy)]$

Str. 8 wiersz 14 zamiast: $dy = \frac{2y+1}{2x} dx = 0$ powinno być: $dy + \frac{2y+1}{2x} . dx = 0$

Str. 9 „ 1 zamiast: z r ó w n a n i a powinno być: z r ó w n a n a

Str. 10 „ 1 zamiast: $lgf = lgf_1 + arctgP'$
powinno być: $lgf = lgf_1 + iarctgP'$

Str. 11 „ 7 zamiast: $lg(x + y + iy) + (x + y + iy^2)$
powinno być: $lg(x + y + iy) + (x + y + iy)^2$